



Vadsbögymnasiet

Program: Teknikprogrammet

GYMNASIEARBETE

Mpemba-effekten

Kan varmt vatten frysa snabbare än kallt?

2025-05-16

Linnea Skoog
TE3

Handledare: Anna Lenhult, Daniel Granath

Abstract / Sammanfattning

The purpose of this examination paper is to investigate the Mpemba-effect. Several reports from different studies on the subject are being concluded and commented regarding the history behind the Mpemba-effect, theories behind what happens, how it can be studied, and what is necessary for the effect to take place.

Briefly described, the Mpemba-effect is a phenomenon that explains how a specimen of warm water can freeze faster than a sample of cold water. It is not yet to be determined why this phenomenon can occur. The name comes from a Tanzanian student named Erasto B Mpemba who noticed the effect when making ice-cream in 1963. He later asked a professor about his observation who promised to investigate it further.

An abundance of scientists and researchers have been trying to gain an understanding of the phenomenon for decades, but the questions still remain. A number of theories are brought up in various reports on the subject. Some theories include evaporation, convection, dissolved gasses, and supercooling and will be discussed further.

The occurrence of the Mpemba-effect is also being showcased by an experiment where hot and cold water are being thrown into the air when the outside temperature is below zero degrees Celsius. First, it was executed at a temperature around -4°C , but the desired effect was not transpired at that attempt. The experiment was then redone at -11°C after the conclusion that it had to take place in a colder environment than at the first try in order to observe the effect. The second attempt were successful. It resulted in some of the warmer water freezing while the colder water remedied liquid. The experiment were also being filmed and compared to the conclusions drawn from the analyzed reports.

Innehållsförteckning

1 Inledning	3
1.1 Syfte och frågeställningar	3
1.2 Avgränsningar	3
1.3 Metod	3
1.3.1 Teoretiskt arbete	4
1.3.2 Laboration	4
1.4 Bakgrund	4
1.4.1 Historien bakom Mpemba-effekten?	4
1.4.2 Vilka teorier finns bakom Mpemba-effekten?	5
2 Resultat	8
2.1 Laboration	8
2.2 Teorier bakom Mpemba-effekten	8
2.3 Vilka förutsättningar krävs för att varmt vatten ska frysa snabbare än kallt vatten?	9
3 Slutsatser och diskussion	10
3.1 Felkällor	11
3.2 Slutsats	11
4 Källförteckning	12

1 Inledning

Tänk att du har två behållare med lika stor volym vatten som du ska försöka frysa på samma sätt med skillnaden att vattnet i de två behållarna har olika temperatur. Skulle det varma vattnet då kunna frysa först? Vid en första anblick känns det självklara svaret som nej. Om ena behållarens vatten är 70°C och den andra behållarens vatten har temperaturen 30°C skulle det ta en stund innan det varma vattnet når 30°C. Efter att det varma vattnet har nått 30°C borde det ta lika lång tid för det att frysa som det tar för vattnet som var 30°C från början, alltså bör det kalla vattnet frysa först.

Vad som är fel med resonemanget att man först kyler varmt vatten till det kalla vattnets temperatur och sedan fryser det är att det utgår från att det enda som skulle förändras med vattnet är temperaturen och att det varma vattnet skulle vara likadant när det når 30°C som det kalla vattnet var vid starten. Det finns nämligen fler faktorer att ta hänsyn till, exempelvis avdunstning, lösta gaser, konvektion och underkylning. Fenomenet att varmt vatten skulle kunna frysa snabbare än kallt vatten brukar kallas för Mpemba-effekten. Orsaken till Mpemba-effekten tycks vara svår att fastställa men det finns olika teorier om vad som påverkar, några vilka kommer lyftas i denna rapport.

1.1 Syfte och frågeställningar

Syftet med detta gymnasiearbete är att undersöka om varmt vatten kan frysa snabbare än kallt vatten, något som kallas Mpemba-effekten. För att kunna påvisa och ge en bild av Mpemba-effekten kommer en laboration där varmt och kallt vatten kastas upp i luften vid minusgrader genomföras. För att koppla resultatet från laborationen till andras forskningsresultat kommer rapporten ta upp olika teorier bakom Mpemba-effekten och vilka förutsättningar som krävs för att detta fenomen ska kunna inträffa.

1. Vad är Mpemba-effekten?
2. Vilka teorier finns om vad Mpemba-effekten kan bero på?
3. Vilka förutsättningar krävs för att varmt vatten ska frysa snabbare än kallt vatten?

1.2 Avgränsningar

För att göra detta arbete genomförbart har vissa avgränsningar gjorts. Information som inte kommer tas upp berör dels temperatur, som temperaturgränser för att Mpemba-effekten ska kunna äga rum och grafer över hur vattens temperatur ändras vid frysning. Rapporten kommer inte heller gå in på huruvida vattenkvaliteten kan påverka resultatet, med andra ord om förorenat respektive destillerat vatten hade gett olika resultat. Inte heller kommer de bakomliggande orsakerna till förekomsten av underkylning av vatten lyftas.

1.3 Metod

För att undersöka den så kallade Mpemba-effekten kommer dels en laboration utföras för att observera vad som händer när varmt respektive kallt vatten kastas upp i luften vid minusgrader och vilka slutsatser som kan dras utifrån det. Dessutom kommer arbetet ha en teoretisk del där andras forskningsresultat analyseras. Sedan kommer olika teorier och resonemang bakom Mpemba-effekten sammanställas dessa i denna rapport.

Syftet med laborationen är att göra det möjligt att påvisa Mpemba-effekten, ge en bild av vad det är samt att kunna koppla teorierna till vad som har påvisats under laborationen och redogöra och resonera kring betydande faktorer.

1.3.1 Teoretiskt arbete

Det teoretiska arbetet kommer huvudsakligen bestå av att sammanfatta olika forskningsresultat. Urvalet görs genom att se vilka som är mest aktuella då det annars kan ha gjorts nya framsteg inom forskningen. Dock kan äldre rapporter användas då de förklarar något även nyare forskning visar när den äldre källan förklarar på ett enklare sätt eller för att de beskriver någon viktig upptäckt. För att kunna ta del av ett större utbud kommer urvalet att ske bland rapporter skrivna på svenska och engelska. För att kunna använda de engelska källorna har de behövt bearbetas och delar har behövt översättas till svenska för att det lättare ska gå att förstå. För en tydligare bild kan dock vissa engelska uttryck från rapporterna komma att tas med där det inte finns en passande svensk översättning som inte ändrar innebörden.

1.3.2 Laboration

Material

2 tekoppar eller liknande typ av behållare

Kastrull

Vatten

Utförande

Utför laborationen när temperaturen ute är mellan -11°C och -25°C .

Ta fram två tekoppar av samma modell.

Mät upp 2 dl kranvatten i den ena muggen. Vattnet ska vara ungefär 30°C .

Koka upp ca 3 dl vatten från samma kran i en kastrull.

Mät upp 2 dl av det kokade vattnet och håll upp i den andra muggen. Arbeta effektivt för att säkerställa att det varma vattnet inte hinner svalna för mycket.

Gå ut och kasta det varma vattnet framför dig så att det når en ungefärlig höjd på fyra meter.

Upprepa kastet med det kalla vattnet.

Filma försöken för att lättare kunna jämföra resultaten.

1.4 Bakgrund

1.4.1 Historien bakom Mpemba-effekten?

Mpemba-effekten är ett fenomen som innebär att varmt vatten fryser snabbare än kallt vatten under vissa förhållanden. Det är namngivet efter Erasto B Mpemba, en tanzanisk student som observerade detta när han på 1960-talet upptäckte att en varm glassblandning frös snabbare än kall i frysen.

Mpemba och Osborne (1969) skriver att Mpemba år 1963 skulle göra glass i skolan. Han skyndade sig för att hinna få den sista lediga glassformen och hade därför inte tid att vänta på att glassmeten som han hade kokat upp skulle svalna. Mpemba tog därför beslutet att frysa den från varmt tillstånd, trots att han hade hört att de var tvungna att vänta tills glassmeten nådde rumstemperatur.

Mpemba berättar att han en och en halv timme efter att ha ställt in glassmeten i frysen gick dit med en annan pojke som hade ställt in sin smet samtidigt för att kolla hur det gick. Till sin förvåning hade Mpembas glass fryst medan den andra pojkens glass fortfarande var en tjock sörja som inte hade fryst helt än, detta trots att den andra pojkens smet var betydligt svalare då den ställdes in. Mpemba frågade flera lärare om sin upptäckt men fick svaret att det var omöjligt då detta skulle gå emot Newtons avsnalningslag. Enligt Newtons avsnalningslag ska nämligen hastigheten på temperatursänkningen vara proportionell mot temperaturskillnaden med omgivningen.

Mpemba och Osborne fortsätter med att berätta om hur dr Osborne några år efter Mpembas första observation föreläste på Mpembas skola och då fick frågan "If you take two beakers with equal volumes of water, one at 35°C and the other at 100°C , and put them into a refrigerator, the one that

started at 100 °C freezes first. Why?”. Dr Osborne lovade att testa påståendet och genomförde sedan ett projekt i ämnet på universitetet. Utifrån det drog de sedan slutsatserna att det varmare vattnet kan frysa först och att avdunstning endast orsakar en liten skillnad i volym och att varken lösta gaser eller ledning av värme genom botten kan förklara fenomenet.

1.4.2 Vilka teorier finns bakom Mpemba-effekten?

Avdunstning

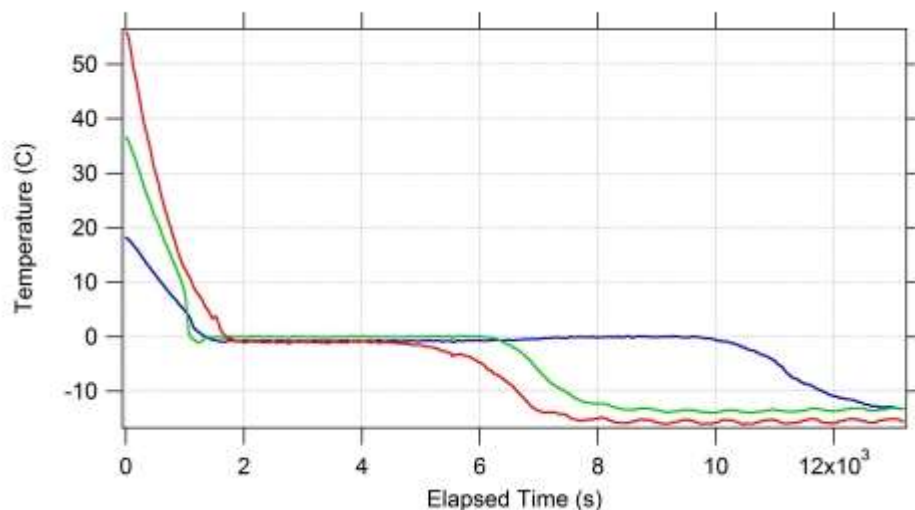
I rapporten "Mpemba effect from a viewpoint of an experimental physical chemist" skriver Nicola Bregović att flera artiklar på ämnet uppger att den högre avdunstningen vatten med högre temperatur har påverkar Mpemba-effekten. Medan avdunstning kan påverka resultatet räcker detta dock inte för att kunna förklara fenomenet. Bregović förklarar att skillnaden i massa aldrig har överstigit 3% när forskare har testat att väga vattnet före och efter frysningen. Han påstår att värmen som förbrukas av avdunstningen alltså är försumbar.

Joseph H. Thomas skriver i sin rapport "The Mpemba Effect: Studying the effects of initial temperature, evaporation, and dissolved gasses on the freezing of water" att han undersökte olika teorier bakom Mpemba-effekten genom att genomföra olika laborationer och på så sätt utesluta vissa faktorer. Även han kom fram till att avdunstning utgjorde en så pass liten skillnad i massa att det inte kan förklara Mpemba-effekten.

Lösta gaser

Det som normalt menas med rent vatten och som i den här rapporten endast benämns som vatten består inte endast av vattenmolekyler. Thomas Krigsman, Bodil Nilsson och Ebba Wahlström skriver i "Kemiskafferiet modul 2" att vatten innehåller en liten mängd lösta salter och gaser. Det är små mängder av gaserna syre, kväve och koldioxid som finns i vattnet. De förklarar att gaser löser sig sämre när vattnets temperatur är hög och att gaserna även lämnar vattnet lättare vid högre temperatur. Det är därför du kan se luftbubblor när du värmer vatten i en kastrull långt innan det börjar koka eller på väggarna av ett kallt glas vatten om det får stå framme en stund.

När vatten värms minskar mängden lösta gaser i vattnet. Joseph H. Thomas påstår att det är just lösta gaser som är den avgörande anledningen till Mpemba-effekten. Thomas prövade teorin på ett flertal sätt. När han med hjälp av en doppvärmare värmde vatten till tre olika temperaturer och sedan bevakade temperaturen under tiden han frös alla tre behållare med vatten genom samma metod fick han resultatet att det varmaste vattnet frös först och att det ursprungligen kallaste vattnet frös sist. Resultatet förde han in i ett diagram, se figur 1.



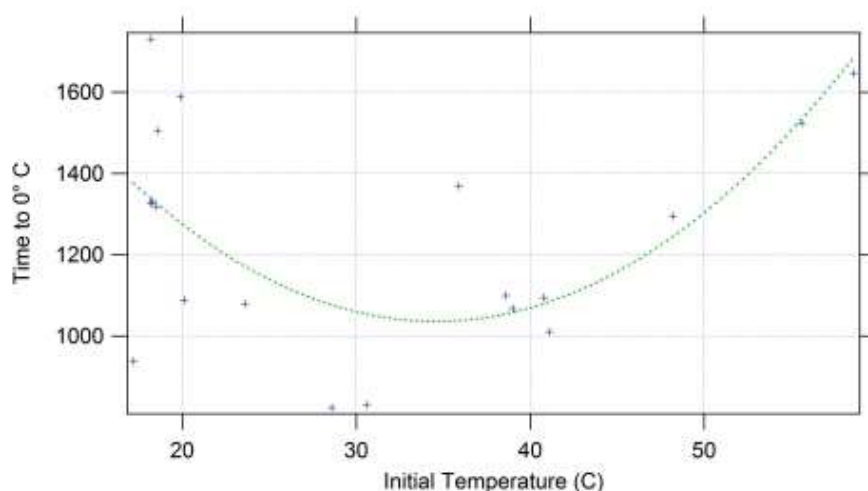
Figur 1

I *Figur 1* går det att se hur vattnet som hade högst temperatur vid start först nådde en temperatur under 0°C trots att det var det som sist nådde 0°C.

För att kunna särskilja skillnader till följd av starttemperaturen från skillnaderna de lösta gaserna orsakar testade Thomas att sakta värma vatten till olika temperaturer på en värmeplatta och sedan låta det svalna till rumstemperatur innan undersökningen upprepades och jämfördes med vatten som startar vid samma temperatur men inte tidigare har värmts upp. För att säkerställa att skillnad i massa inte har haft effekt på resultatet vägs vattnet både före och efter utförandet.

Resultatet som Thomas kom fram till efter att ha frusit vattnet efter att ha låtit det svalna till rumstemperatur var att vattnet frös snabbare ju högre temperatur det tidigare hade värmts upp till.

För att sedan se huruvida det är själva fasövergången som påverkas eller om temperaturen sjunker snabbare testade Thomas hur lång tid det tar innan temperaturen når 0°C för vatten som har värmts upp till olika starttemperaturer. Resultaten sammanställdes i ett diagram, se *Figur 2*.



Figur 2

I Figur 2 går det att utläsa att det gick snabbast att kyla vatten med en ursprunglig temperatur på runt 35°C om man kollar i intervallet 15–60°C. Anmärkningsvärt är hur vatten som startar vid 50°C tar nästan lika lång tid att kyla till 0°C som vatten som startar vid 20°C alltså mindre än halva starttemperaturen.

Konvention

Konvektion är en rörelse i en vätska eller gas och en av de tre typerna av värmetransport. M. Vynnycky och S. Kimura skriver i "Can natural convection alone explain the Mpemba effect?" (International Journal of Heat and Mass Transfer, 2015) att naturlig konvektion, där rörelsen hos vatten med ursprungligen högre temperatur kan leda till förbättrad värmeöverföring, och på så sätt snabbare kylning än för vatten vars temperatur ursprungligen ligger närmare omgivningens temperatur.

Bregović förklarar konvektionens påverkan med att vatten som placeras i kyla får en temperaturgradient, det vill säga att det är kallare vid sidorna och varmare i centrum. Detta orsakar värmekonvektion. Varmare gradient leder till högre konvektion och därmed snabbare nedkylning eftersom det utsätts för kyla utifrån.

Ytterligare menar Bregović att konvektion även beror på ett ämnes viskositet, med det menas vätskans interna motstånd mot flöden, dess "tjockhet". Viskositeten hos vatten ökar exponentiellt vid en sänkning i temperatur. Konvektionsflöden är därmed avsevärt enklare att inducera vid högre temperaturer. Även om konvektionen minskar med nedkylningen förutsätter Bregović att den tidigare högre temperaturen har något av en ihållande effekt. Då Mpemba-effekten även kan äga rum vid omrörning av vattnet ses det inte som en enrådig faktor till fenomenet.

Underkylning

Underkylning innebär att en vätskas temperatur sänks under dess smältpunkt innan den övergår till fast form. Bregović förklarar att det är svårt att återskapa resultaten och att resultatet skiljer sig mycket beroende på var mätningen sker.

Thomas uppgav att inget uppenbart fall av underkylning kunde noteras vid sina laborationer. Han mätte temperaturen i centrum av sina vattenbehållare. I rapporten "A search for the Mpemba effect: When hot water freezes faster than cold water" skriver James D. Brownridge däremot att varmt vatten endast fryser snabbare än kallt vatten när det kalla vattnet underkyls mer. Var i vattnet som Brownridge mäter temperaturen är dock oklart.

Bregović tar upp att en forskare vid namn Auerbach ska ha observerat underkylning vid mätningar några millimeter ifrån kanten av behållaren, det går därför att anta att det är det som skiljer Thomas resultat från Brownridge och Auerbach. Underkylning räcker inte som enskild förklaring till Mpemba-effekten då en förklaring till varför ursprungligen varmare vatten underkyls mindre än kallare vatten saknas.

2 Resultat

2.1 Laboration

Min egen undersökning i form av en laboration påvisade Mpemba-effekten då det blev som ett frostmoln av det varma vattnet medan allt det kalla vattnet föll ned till backen utan att något hände. Värt att nämna är även att inte allt det varma vattnet hann frysa utan att en del fortfarande förblev i flytande form. En upprepning av experimentet gav samma resultat som innan. Det fungerade vid -11°C men när det testades vid -4°C uteblev effekten.

Allt det varma vattnet hann inte frysa i luften men det gav ändå ett synligt moln som visar en tydlig kontrast mot det kalla vattnet där inget synligt moln bildades. Detta synliggörs i *Figur 3* och *Figur 4* nedan.



Figur 3 – varmt vatten



Figur 4 – kallt vatten

2.2 Teorier bakom Mpemba-effekten

När det pratas om Mpemba-effekten brukar avdunstning, lösta gaser, konvektion och underkylning tas upp som möjliga faktorer. Vissa anser att alla de faktorerna faktiskt har en betydande effekt på resultatet vid undersökningar medan andra tycker att de har motbevisat någon eller några av faktorerna. Resultaten mellan olika undersökningar skiljer sig åt.

Avdunstning är en faktor som de flesta är överens om inte har någon stor påverkan på resultatet då det inte har uppmätts en skillnad i massa större än 3% vid de olika testerna som tidigare har beskrivits. Inte heller konvektion som kan påverka resultatet ses som en central aspekt eftersom Mpemba-effekten även har kunnat observeras vid omrörning av vattnet.

Mycket talar för påverkan som lösta gaser har på effekten men det är inte alltid undersökningarna utformas för att fokusera på de lösta gaserna. Thomas som försökte minimera effekten av de andra möjliga faktorerna är däremot övertygad om att det är den avgörande faktorn till fenomenet.

Fenomenet med underkylning som kan göra att vattnet når en temperatur som är flera grader under smältpunkten för vatten är svårt att mäta då utformningen av mätningen ger väldiga differenser på resultatet. Thomas som mätte temperaturen i centrum av behållaren påstod att ingen underkylning hade ägt rum, medan Auerbach som i stället utförde sina mätningar några millimeter från kanten kunde utläsa ett distinkt förekommande av underkylning.

2.3 Vilka förutsättningar krävs för att varmt vatten ska frysa snabbare än kallt vatten?

Det finns olika faktorer som påverkar förekomsten av Mpemba-effekten. För att få effekt av skillnaden av de lösta gaserna får inte det kalla vattnet nyligen ha varit uppvärmt och på så sätt tappat mycket av sina lösta gaser då det tar tid för gaser att lösa sig i vattnet igen. Det går bland annat att se av Thomas undersökningar.

Underkylning kan vara en viktig parameter för att Mpemba-effekten ska kunna inträffa. För att kunna se hur mycket det påverkar behöver man tänka på hur och var man genomför mätningen. Termometerens placering i vattnet har stor effekt på mätningen. Underkylning behöver med stor sannolikhet förekomma i någon grad för att effekten ska inträffa. En förklaring till varför vattnet underkyls skulle däremot behövas. Ifall det är de lösta gaserna som får det kalla vattnet att underkylas mer skulle de lösta gaserna vara den faktiska bakomliggande orsaken och inte själva underkylningen.

3 Slutsatser och diskussion

Syftet med arbetet var att undersöka den så kallade Mpemba-effekten. Historien bakom och vad effekten egentligen syftar på vad relativt enkelt att få fram. Vilka förutsättningar som krävs och vilka faktorer som ligger bakom fenomenet är dock betydligt mer invecklat. Det finns olika teorier som det spekuleras kring men det är svårt att begränsa undersökningarna till att fokusera på en faktor för att kunna stärka eller utesluta den. Hur testerna och mätningarna är utformande verkar även ha stor effekt på resultatet vilket försvårar undersökningen ytterligare.

När laborationen utfördes i -11°C gick det tydligt att se hur det bildades ett moln av det varma vattnet men inte av det kalla. Sådels har rapporten lyckats med att visualisera Mpemba-effekten. Genom att ha testat att utföra laborationen vid två olika temperaturer, -4°C och -11°C , går det att se att gränsen för hur kallt det behöver vara ligger mellan -4°C och -11°C . Var den går exakt har inte fastställts. Med största sannolikhet beror det även på andra faktorer som vattnets temperatur. Allt det varma vattnet frös inte vid kastet, antagligen skulle kallare temperatur ute ge ett tydligare resultat. Hur kallt det kan vara innan det kalla vattnet fryser är inte heller fastställt då tillräckliga temperaturer för att testa det inte har uppmätts i under den aktuella tidsperioden.

Eftersom massa är något som påverkar frysningstiden så skulle avdunstning vara en rimlig förklaring till att varmt vatten fryser snabbare än kallt. Varmt vatten avdunstar nämligen snabbare än kallt vatten och bör därför få en lägre massa även om de hade samma massa vid start. Dock har detta undersökts och författarna bakom rapporterna som har studerats verkar överens om att avdunstningen är för liten för att ha någon märkbar påverkan. Utifrån det kan slutsatsen dras att det måste vara något annat som ligger till grund för fenomenet. Laborationen i den här rapporten kan däremot inte utesluta det som en parameter eftersom massan inte kunde kontrolleras efter försöken till följd av laborationens utformning.

Konvektion skulle kunna vara en faktor till förekommandet av Mpemba-effekten i vissa situationer. Att vattnets viskositet till följd av temperaturen leder till ökad konvektion och bättre värmeöverföring verkar rimligt. Däremot har det även gått att observera effekten vid laborationer med omrörning där konvektionen begränsas, alltså behöver något annat ha större påverkan på effekten.

Förekomsten av underkylning verkar vara svår att mäta precist då stora skillnader på mätvärdena beror på metoden för mätningarna. De som har uteslutit underkylning som anledning har inte utfört mätningarna på samma sätt som de som ser underkylning som en avgörande faktor till Mpemba-effekten vilket med stor sannolikhet är anledningen till att inte alla uppvisar underkylning. Att en anledning till att varmt vatten fryser snabbare än kallt vatten skulle vara att det underkyls mindre och därför fryser vid en högre temperatur än vatten kan ses som en mycket trolig aspekt i det hela. Det skulle därför vara intressant att undersöka det närmare vid en mer omfattande undersökning. Anledningen till att varmt vatten underkyls mer skulle dock behöva fastställas. Vad som egentligen kan anses ha störst påverkan på fenomenet skulle kunna vara vad skillnaden i underkylning beror på, snarare än själva underkylningen.

3.1 Felkällor

Flera av de rapporter som har lästs och granskats skiljer sig åt. Det finns olika möjliga orsaker till att de har fått olika resultat och varför Mpemba-effekten ännu inte har någon tydlig förklaring som forskarna har kunnat enas om.

Något som skulle behöva tydliggöras är definitionen av frysning. Beroende på vad de olika källorna syftar på när de talar om fryspunkten kan det ge distinkta skillnader i resultat. De olika tidpunkterna som skulle kunna användas är följande:

- Vattnet når 0°C , alltså smältpunkten för vatten
- Första iskristallen observeras
- Vattnet ser ut att vara genomfrost
- När latent värme frigörs
- När temperaturen börjar sjunka igen efter att ha varit stabil under tiden då energin används för själva fasövergången

För att kunna jämföra resultat från olika undersökningar bättre behöver det vara tydligt vad mätningen omfattar. Något som nämndes i vissa rapporter men inte alla. För att kunna se var den största skillnaden sker mellan varmt och kallt vatten hade det även varit intressant att dela upp undersökningen och gå djupare in på olika delar var för sig som sänkningen till 0°C och sedan 0°C till när latent värme frigörs.

En annan aspekt som har visat sig ha betydande effekt på resultaten är var temperaturen har uppmätts. För att få en bättre bild skulle undersökningar behöva testas med olika mätmetoder. Skillnader finns exempelvis i observationer om underkylning. Det finns dock skillnader i hur experimenten har utförts och för att kunna jämföra hade det varit optimalt att upprepa samma experiment med olika mätställen.

3.2 Slutsats

Det mest övertygande av de möjliga faktorerna som undersökts är lösta gaser. När vatten värms upp frigörs en del av de lösta gaserna i vattnet. Det tar ett tag för gaser att lösas i vatten så det varma vattnet lär ha mindre lösta gaser än det kalla så länge det kalla vattnet inte nyligen har värmts upp för att sedan snabbt ha kylts ned. Thomas testade att utföra undersökningar med vatten som nyss varit uppvärmt och fick då fram att effekten inte längre inträffade. Det är möjligt att något annat har förändrats med vattnet än just de lösta gaserna men det påvisar att det inte är starttemperaturen i sig utan något med vattnets egenskaper som förändras vid uppvärmning som påverkar effekten. Thomas med fleras teori om lösta gaser låter således som den avgörande anledningen till fenomenet. Kanske är det även de lösta gaserna som påverkar underkylningen.

4 Källförteckning

Bregović, N. (u.å). *Mpemba effect from a viewpoint of an experimental physical chemist*. The Royal Society of Chemistry https://www.rsc.org/images/nikola-bregovic-entry_tcm18-225169.pdf

Brownridge, JD. (2010). *A search for the Mpemba effect: When hot water freezes faster than cold water*. Department of Physics, Applied Physics, and Astronomy, State University of New York at Binghamton. <https://arxiv.org/pdf/1003.3185>

Burridge, HC., Linden PF. (2016) *Questioning the Mpemba effect: hot water does not cool more quickly than cold*. Sci Rep. <https://pmc.ncbi.nlm.nih.gov/articles/PMC5121640/>

Jeng, M. (1998). *Can hot water freeze faster than cold water?*. Department of Physics, University of California. https://math.ucr.edu/home/baez/physics/General/hot_water.html

Krigsman, K., Nilsson, B., Wahlström, E. (2002). *Vatten innehåller lösta gaser!*. Kemiskafferiet modul 2 https://www.su.se/polopoly_fs/1.652395.1680073935!/menu/standard/file/Modul%20-5%20Vatten%20inneh%C3%A5ller%20%C3%B6sta%20gaser.pdf

Mpemba, EB., Osborne, DG. (1969). *Cool?*. Physics Education. <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0031-9120/4/3/312>

Thomas, JH. (2007). *The Mpemba Effect: Studying the effects of initial temperature, evaporation, and dissolved gasses on the freezing of water*. Department of Physics, The College of Wooster. https://physics.wooster.edu/wp-content/uploads/2021/08/Junior-IS-Thesis-Web_2007_Thomas.pdf

Vynnycky, M., Kimura, S. (2015). *Can natural convection alone explain the Mpemba effect*. International Journal of Heat and Mass Transfer. <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0017931014008072>